Prof. Dr. Alfred Toth

Kommutative Tensorprodukte aus semiotischen Dimensionszahlen

1. Eine monoidale Kategorie ist eine Kategorie C, wobei es gibt

a) einen Bifunktor $\otimes$: $C \times C \rightarrow C$, genannt das Tensorprodukt
b) ein Objekt I, genannt das Identitätsobjekt
c) drei natürliche Isomorphismen, die den folgenden Kohärenzgesetzen unterliegen:
   c.1) Assoziativität der Tensoroperation: Es gibt einen natürlichen Isomorphismus α, wobei $\alpha_{A, B, C}$: $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$,
   c.2) Links- und Rechtsidentität von I: Es gibt zwei natürliche Isomorphismen λ und ϱ, wobei λ_A: $I \otimes A \cong A$ und ϱ_A: $A \otimes I \cong A$

Für eine "braided monoidal category" wird zusätzlich das "braiding" verlangt, worunter ein natürlicher Isomorphismus

$\gamma_{A, B}$: $A \otimes B \rightarrow B \otimes A$

verstanden wird, für den die beiden folgenden hexagonalen Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes (B \otimes C) \arrow[r] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[dr, "\alpha"] & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma \otimes 1"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \\
& (B \otimes A) \otimes C \arrow[r] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[ur, "1 \otimes \gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes B) \otimes C \arrow[r] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[dr, "\alpha^{-1}"] & \\
A \otimes (B \otimes C) \arrow[ur, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "1 \otimes \gamma"'] & & & (C \otimes A) \otimes B \\
& A \otimes (C \otimes B) \arrow[r] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[ur, "\gamma \otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

Ausserdem kann eine "braided monoidal category" als eine Trikategorie mit einer 0-Zelle und einer 1-Zelle aufgefasst werden, worunter eine schwache 3-Kategorie verstanden wird (Bénabou 1967; Joyal und Street 1993) und womit wir bei der Semiotik sind.

2. Da die Semiotik die Bedingungen einer Kategorie erfüllt (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.), müssen nur noch die obigen Bedingungen einer monoidalen Kategorie erfüllt sein:

a) ist erfüllt, vgl. zu semiotischen Tensorprodukten Toth (2008, S. 105 ff.).
b) ist erfüllt, vgl. zu identitiven Semiosen Toth (1997, S. 22).

c.1) Die Assoziativität von semiotischen Tensorprodukten ist nicht erfüllt, vgl. etwa $(2 \otimes 1) \neq (1 \otimes 2)$. Sie ist allgemein dann nicht erfüllt für $(a \otimes b) \neq (b \otimes a)$, wenn a und b semiotische Variablen für triadische Haupt- oder trichotomische Stellenwerte sind. Sie sind jedoch erfüllt, wenn es sich bei a, b, c um semiotische Dimensionszahlen handelt (vgl. Toth 2009a, b).
c.2) Die Erfülltheit der Links- und Rechtsidentität von I ergibt sich ebenfalls aus Toth (1997, S. 22).

2. Die Existenz von semiotischen n-Kategorien wurde für die triadischen Subzeichen des Stiebingschen Zeichenkubus nachgewiesen (Toth 2009c). Jedes triadische Subzeichen hat die folgende allgemeine Struktur

$$\mathrm{PZ} = \mathrm{a.}\left\{\begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{matrix}\right\}\mathrm{c},$$

wobei $\dim(a) \in \{1, 2, 3\}$ die Dimensionszahl und $c \in \{.1, .2, .3\}$ der trichotomische Stellenwert eines Subzeichens ist. Nun ist die Position von a grundsätzlich egal, d.h. das obige Schema kann auch als

$$\mathrm{PZ} = \left\{\begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{matrix}\right\}\mathrm{a.c},$$

oder

$$\mathrm{PZ} = \mathrm{a.c.}\left\{\begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{matrix}\right\}$$

geschrieben werden, da seine Werte nicht wie die trichotomischen Werte von den triadischen Hauptwerten qua semiotischer Inklusionsordnung

$$\text{3-ZR} = (\mathrm{a.3.b\ c.2.d\ e.1.f}) \text{ mit } b \leq d \leq f$$

abhängen. Unter dieser Voraussetzung können wir also die obigen hexagonalen Diagramme als semiotische Diagramme kommutieren lassen. Wir wählen willkürlich A = 1, B = 2, C = 3 und bekommen dann

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \otimes (2 \otimes 3) \arrow[r] & (2 \otimes 3) \otimes 1 \arrow[dr, "\alpha"] & \\
(1 \otimes 2) \otimes 3 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma\otimes 1"'] & & & 2 \otimes (3 \otimes 1) \\
 & (2 \otimes 1) \otimes 3 \arrow[r] & 2 \otimes (1 \otimes 3) \arrow[ur, "1\otimes\gamma"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (1 \otimes 2) \otimes 3 \arrow[r] & 3 \otimes (1 \otimes 2) \arrow[dr, "\alpha^{-1}"] & \\
1 \otimes (2 \otimes 3) \arrow[ur, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "1\otimes\gamma"'] & & & (3 \otimes 1) \otimes 2 \\
 & 1 \otimes (3 \otimes 2) \arrow[r] & (1 \otimes 3) \otimes 2 \arrow[ur, "\gamma\otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

In den obigen Diagrammen erkennt man also überall da, wo ein semiotisches Tensorprodukt der Form $(a \otimes b) = (b \otimes a)$ auftritt, eine Dimensionszahl dim(a) oder dim(b), und diese ist wegen der Kommutativität der beiden Diagramme eindeutig.

Bibliographie

Bénabou, Jean, Introduction to bicategories I. In: Reports of the Midwest Category Seminar (Lecture Notes in Mathematics, vol. 47). New York 1967, S. 1-77

Joyal, André/Street, Rott, Braided tensor categories. In: Advances in Mathematics 102, 1993, S. 20-78

Toth, Alfred, Entwurf einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Mehrdimensionale Zeichenklassen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, www.mathematical-semiotics.com (2009a)

Toth, Alfred, Kategorial- und Dimensionszahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, www.mathematical-semiotics.com (2009b)

Toth, Alfred, Verschachtelte 2- und 3-dimensionale semiotische n-Kategorien. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, www.mathematical-semiotics.com (2009c)